

EKSPONENCIJALNI TREND

Ako se pojava s vremenom mijenja za približno isti *relativni iznos*, njezin je trend razvoja eksponencijalni. Prikažemo li takav vremenski niz grafikonom, njegove će se vrijednosti raspoređivati uzduž eksponencijalne krivulje.

Na postojanje eksponencijalnog trenda upućuju verižni indeksi ili stope promjene jer oni pokazuju promjene razine pojave u uzastopnim razdobljima, i to u relativnom iznosu. Ako su ti pokazatelji približno konstantni, može se primijeniti model eksponencijalnog trenda.

MODEL EKSPONENCIJALNOG TRENTA s procijenjenim parametrima u općem je obliku: $\hat{y} = ab^x$. Logaritamski je oblik modela: $\log \hat{y} = \log a + \log bx$. Procjene logaritamskih vrijednosti parametara sljede primjenom izraza:

$$\log b = \frac{\sum_{t=1}^N x_t \log y_t - \bar{x} \sum_{t=1}^N \log y_t}{\sum_{t=1}^N x_t^2 - N\bar{x}^2}, \log a = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log y_t - \log b\bar{x}.$$

U polaznom su modelu a i b nepoznati parametri, a x_t je varijabla vrijeme koja poprima vrijednosti prvih N prirodnih brojeva. Oblik trenda ne možemo analizirati izravno¹ na isti način kao da je riječ o linearnom trendu, nego polazeći od njegova logaritamskog oblika.

Logaritamski oblik modela eksponencijalnog trenda možemo usporediti s modelom linearnog trenda i analizirati ga istim postupcima. Razlika, dakako, postoji: u postupcima analize logaritamskog oblika eksponencijalnog trenda umjesto izvornih vrijednosti članova niza rabimo njihove logaritme.

Model s procijenjenim parametrima u nelogaritamskom obliku, odnosno vrijednosti procjena parametara a i b dobiju se antilogaritmiranjem.

TUMAČENJE ČLANOVA a I b U JEDNADŽBI EKSPONENCIJALNOG TRENTA

Veličina a jest vrijednost trenda za razdoblje prije prvog razdoblja u nizu, b je koeficijent eksponencijalnog trenda koji upućuje na relativnu promjenu vrijednosti trenda. Stopa promjene vrijednosti trenda dana je izrazom:

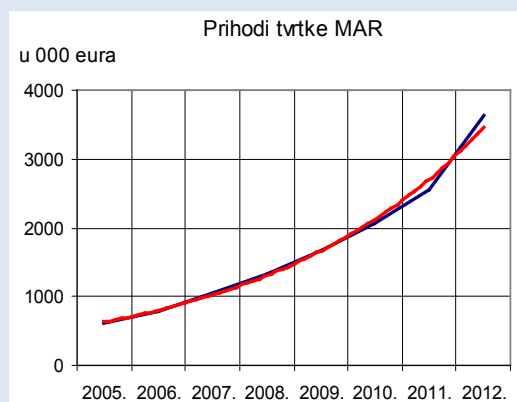
$$s_{\hat{y}} = (b - 1) \cdot 100.$$

Stopa promjene vrijednosti trenda (5.27) nije jednaka prije definiranoj prosječnoj stopi jer se one temelje na različitim polazištima.

¹ Procjenjujemo li veličine a i b u tome modelu metodom najmanjih kvadrata, dolazimo do sustava jednadžbi koje su zamršene za rješavanje.

PRIMJER 1.

Niz vrijednosti prihoda tvrtke MAR (u tisućama eura i logaritamske vrijednosti niza) prikazani su grafički. Na temelju prikaza uočljiv je eksponencijalni trend.



Vremenski niz i eksponencijalni trend



Grafikon logaritamskih vrijednosti niza

Podatci i međurezultati te logaritamske vrijednosti trenda i trend-vrijednosti prikazani su u tablici.

Godina	Prihod	Varijabla vrijeme			Logaritam vrijednosti trenda	Vrijednosti trenda
	y_t	x_t	$\log y_t$	$x_t \log y_t$	$\log \hat{y}_t$	\hat{y}_t
2005.	622.0	1	2.79379	2.79379	2.79818	628.3
2006.	789.6	2	2.89741	5.79481	2.90385	801.4
2007.	1063.3	3	3.02666	9.07997	3.00952	1022.2
2008.	1321.6	4	3.12110	12.48440	3.11520	1303.8
2009.	1676.9	5	3.22451	16.12254	3.22087	1662.9
2010.	2056.0	6	3.31302	19.87814	3.32654	2121.0
2011.	2560.9	7	3.40839	23.85875	3.43222	2705.3
2012.	3625.6	8	3.55938	28.47504	3.53789	3450.6
Ukupno	–	36	25.34426	118.48743	25.34427	–

Model eksponencijalnog trenda oblika je $\hat{y} = ab^x$ a u logaritamskom je obliku $\log \hat{y} = \log a + \log bx$. Procjene parametara (logaritamski oblik) slijede primjenom izraza:

$$\log b = \frac{\sum_{t=1}^8 x_t \log y_t - \bar{x} \sum_{t=1}^8 \log y_t}{\sum_{t=1}^8 x_t^2 - N\bar{x}^2} = \frac{118.48743 - 4.5 \cdot 25.34426}{204 - 8 \cdot 4.5^2},$$

$$\log b = 0.10567, b = 1.27548$$

$$\log a = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 \log y_t - \log b \bar{x} = \frac{25.34426}{8} - 0.10567 \cdot 4.5, \log a = 2.69250,$$

$$a = 492.60845.$$

Jednadžba je eksponencijalnog trenda (logaritamski oblik)

$\log \hat{y} = 2.69250 + 0.10567x$, a u nelogaritamskom obliku $\hat{y} = 492.60845 \cdot 1.27548^x$. Veličina je prvoga procijenjenog parametra (zaokruženo) $a = 492.6$. To je vrijednost trenda za razdoblje koje prethodi prvom razdoblju u nizu (2004. godina).

S pomoću koeficijenta b određuje se prosječna stopa eksponencijalne promjene, odnosno stopa *promjene vrijednosti trenda*. Stopa je

$$s_{\hat{y}} = (b - 1) \cdot 100 = (1.27548 - 1)100, s_{\hat{y}} = 27.5 \, \%.$$

Prema trendu, u navedenom se razdoblju vrijednost prihoda povećavala po stopi od 27.5 % na godinu.

Uvrštavanjem vrijednosti varijable vrijeme u jednadžbu eksponencijalnog trenda s procijenjenim parametrima dobivaju se vrijednosti trenda za navedena razdoblja. Između izvornih vrijednosti premija i premija prema trendu (vrijednosti trenda) uočit će se razlike, što je i razumljivo jer trend opisuje razvoj pojave u smislu prosjeka zato što je riječ o statističkom nizu.

Osim procjena parametara a i b eksponencijalnog trenda, računaju se standardna devijacija i koeficijent varijacije trenda. Te se veličine utvrđuju na temelju logaritamskih vrijednosti, koje se zatim antilogaritmiraju.

Osim linearnoga i eksponencijalnog trenda, vremenski nizovi mogu očitovati i druge oblike trenda, a izbor prikladnog trenda izvire iz svojstava niza i primjene statističkih numeričkih postupaka.